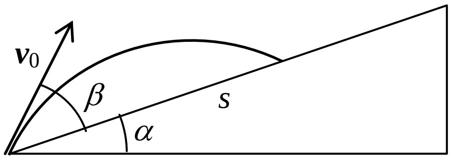
55. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2013/2014
Riešenie úloh domáceho kola kategórie B

(ďalšie informácie na http://fo.uniza.sk a www.olympiady.sk)

1. Hračkárske delo

Riešenie:

a) Obr. RB–1 **2 body**



Obr. RB–1

b) Ide o šikmý vrh s uhlom $\alpha + \beta$ vzhľadom na vodorovnú rovinu rýchlosťou v_0. Súradnice loptičky ako hmotného bodu vyjadrujú vzťahy

$$x = v_0\, t \cos(\alpha + \beta)$$

$$y = v_0\, t \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} g\, t^2 .$$

Bod dopadu loptičky na šikmú plochu má súradnice $x_D = s \cos\alpha$, $y_D = s \sin\alpha$, kde s je vzdialenosť dopadu loptičky na šikmú plochu od ústia hlavne.

Čas dopadu, ak loptička opustila hlaveň dela v čase $t \approx 0$ s,

$$t_D = \frac{x_D}{v_0 \cos(\alpha + \beta)} = \frac{s \cos\alpha}{v_0 \cos(\alpha + \beta)}$$

dosadíme do vzťahu pre zvislú súradnicu

$$y_D = s \sin\alpha = v_0 \frac{s \cos\alpha}{v_0 \cos(\alpha + \beta)} \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} g \left(\frac{s \cos\alpha}{v_0 \cos(\alpha + \beta)} \right)^2$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \frac{g\, s \cos\alpha}{v_0^2} \left[1 + \mathrm{tg}^2(\alpha + \beta)\right], \qquad (1)$$

kde sa použila substitúcia $1/\cos^2\gamma = 1 + \mathrm{tg}^2\gamma$, $\gamma = \alpha + \beta$. Rovnicu (1) pre hľadanú veličinu $\mathrm{tg}\gamma$ upravíme na kvadratický tvar

$$\mathrm{tg}^2\gamma - 2 \frac{v_0^2}{g\, s \cos\alpha} \mathrm{tg}\gamma + \left(1 + \frac{2 v_0^2}{g\, s \cos\alpha} \mathrm{tg}\alpha \right) = 0 . \qquad (2)$$

Pre istú hodnotu s dostaneme dve riešenia, tzn. dva uhly vrhu, čo fyzikálne znamená, že vzdialenosť s dosiahne loptička pri dvoch rozdielnych uhloch γ, teda aj β. Maximálny dolet zodpovedá jednému dvojnásobnému riešeniu, tzn. nulovej hodnote diskriminantu D rovnice (2)

$$D=\left(\frac{v_0^2}{g\,s\cos\alpha}\right)^2-\left(1+\frac{2\,v_0^2}{g\,s\cos\alpha}\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)=0\,. \qquad (3)$$

Výraz (3) upravíme na tvar kvadratickej rovnice pre veličinu s

$$s^2+2\left(\frac{v_0^2}{g\cos\alpha}\,\mathrm{tg}\alpha\right)s-\left(\frac{v_0^2}{g\cos\alpha}\right)^2=0\,. \qquad (4)$$

Riešením (4) máme

$$s=\frac{v_0^2}{g\cos\alpha}\,\mathrm{tg}\alpha\left[-1\pm\sqrt{1+\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}\right)^2}\,\right].$$

Podľa úrovne spracovania **0 až 6 bodov**

(možno použiť aj iný postup s rovnakým výsledkom)

Fyzikálny zmysel má len riešenie $s > 0$, tzn. hodnota so znamienkom „+“, a tej zodpovedá aj maximálna hodnota s_m

$$s_\mathrm{m}=\frac{v_0^2}{g}\,\frac{1}{1+\sin\alpha}\quad .$$

Potrebujeme ešte určiť uhol β_m. Pre nulový diskriminant riešenie rovnice (2) je

$$\mathrm{tg}\gamma_\mathrm{m}=\frac{v_0^2}{g\,s\cos\alpha}\text{, resp. }\beta_\mathrm{m}=\mathrm{arctg}\left(\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)-\alpha\,.$$

Pre dané hodnoty veličín $s_\mathrm{m} \approx 6{,}8$ m a $\beta_\mathrm{m} \approx 30°$. **2 body**

2. *Dýchanie*

Riešenie:

a) Tlak plynu je súčtom parciálnych tlakov všetkých jeho zložiek (Daltonov zákon), pričom parciálne tlaky určíme zo stavovej rovnice ideálneho plynu

$$p=\frac{n\,RT}{V}=\sum\frac{n_i\,R\,T}{V}\text{, odkiaľ }\ n=\sum n_i\ .$$

Pri určovaní parciálnych tlakov vychádzame z predpokladu, že všetky zložky plynu majú k dispozícii celý objem V a majú rovnakú teplotu T.

Objemový zlomok i–tej zložky p_i sa určuje ako podiel pomer objemu V_i i–zložky a celkového objemu V plynu, ktorý by plyny zaujímali samostatne pri rovnakom tlaku p a rovnakej teplote T

$$p=\frac{n_i\,RT}{V_i}=\frac{n\,RT}{V}\text{, odkiaľ }\frac{n_i}{V_i}=\frac{n}{V}\text{, resp. }\frac{n_i}{n}=\frac{V_i}{V}\,.$$

Celkový objem je rovný súčtu parciálnych objemov pripadajúcich na jednotlivé zložky

$$V = \sum V_i \text{ , pričom } \sum \frac{V_i}{V} = \sum \varphi_i = 1, \qquad \text{(Amagatov zákon)}$$

kde $\varphi_i = V_i / V$ je objemový zlomok i–tej zložky (objemové zastúpenie zložky plynu)

Hmotnosť plynu je súčtom hmotností jednotlivých zložiek

$$n\, M_\mathrm{m} = \sum n_i\, M_{\mathrm{m}i} \text{ , odkiaľ } M_\mathrm{m} = \sum \frac{n_i}{n} M_{\mathrm{m}i} = \sum \varphi_i\, M_{\mathrm{m}i} \; .$$

Pre dané zloženie plynu N_2 (28,014), O_2 (32,000), Ar (39,948), CO_2 (44,011)

$M_\mathrm{m} = 28{,}96 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$. **2 body**

Stopové prvky neuvažujeme.

b) Parciálny tlak p_i i–tej zložky určíme napr. pomocou parciálnych objemov

$$p_i\, V = p_0\, V_i \quad \text{, odkiaľ} \qquad p_i = p_0 \frac{V_i}{V} = p_0\, \varphi_i \, .$$

Pre kyslí a dusík dostaneme hodnoty $p_{O2} \approx 21{,}16$ kPa, $p_{N2} \approx 78{,}9$ kPa. **2 body**

c) Pri zostupe do hĺbky h je tlak vody a tým aj tlak vdychovaného vzduchu

$$p = p_0 + h \rho g \, .$$

Parciálny tlak kyslíka v hĺbke h_1

$$p_{O2} = p_1\ \varphi_{O2} = \left(p_0 + h_1 \rho g\right) \varphi_{O2} \, . \qquad (1)$$

Z podmienky $p_{O2} \le p_1$ dostaneme hraničnú hĺbku

$$h_{1\max} = \frac{1}{\rho g}\left(\frac{p_1}{\varphi_{O2}} - p_0\right)$$, pre dané hodnoty veličín $h_{1\,\max} \approx 67{,}6$ m. **2 body**

d) Rovnakým spôsobom dostaneme podmienku pre hraničnú hĺbku straty vedomia

$$h_{2\max} = \frac{1}{\rho g}\left(\frac{p_3}{\varphi_{N2}} - p_0\right)$$, pre dané hodnoty veličín $h_{2\,\max} \approx 41{,}9$ m. **2 body**

e) Podobne ako v predchádzajúcich prípadoch určíme z rovnice (1) objemový zlomok φ_{O2} pre maximálny parciálny tlak p_1 a hĺbku h_3

$$\varphi_{O2} = \frac{p_1}{p_0 + h_3 \rho g}$$, pre dané hodnoty $\varphi_{02} \approx 4{,}96$ %.

Rovnako pre dusík

$$\varphi_{N2} = \frac{p_3}{p_0 + h_3 \rho g}$$, pre dané hodnoty $\varphi_{02} \approx 12{,}41$ %.

Objemový zlomok hélia

$\varphi_{He} = 1 - \varphi_{O2} - \varphi_{N2}$, pre dané hodnoty $\varphi_{He} \approx 82{,}63$ %. **2 body**

3. *Teplotná závislosť odporu ampérmetra a voltmetra*

Riešenie:

a) Rozsah meracieho prístroja bez úpravy je I_m = 50 μA.

Ak prístroj použijeme bez úpravy ako voltmeter je jeho rozsah pri teplote t_0

$U_{m0} = R_{m0}\, I_m$ = 1,0 mV. **1 bod**

Keďže výchylka zodpovedá prúdu, zodpovedá zmenenému odporu prístroja aj zmenená hodnota na stupnici napätia

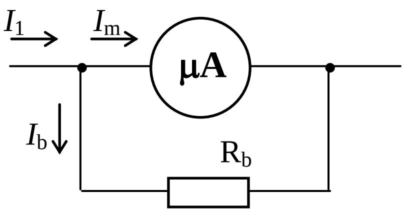
$U_m = R_m\, I_m = R_{m0}\,(1 + \alpha_{Cu}\,\Delta t)\, I_m$.

Relatívna chyba údaja voltmetra je

$\delta_U = \dfrac{U_m - U_{m0}}{U_{m0}} = \alpha_{Cu}\,\Delta t = \alpha_{Cu}\,(t_n - t_0)$, pre dané hodnoty δ_U = – 3,9 %,

čo je pomerne značná chyba. **1 bod**

b) Ak chcem prístrojom merať väčší prúd ako je jeho rozsah, musíme k nemu zaradiť paralelný rezistor (bočník) s odporom R_b, ktorým prechádza prúd $I_b = I_1 - I_m$, obr. RB–2.



Obr. RB–2

schéma **1 bod**

Hodnota odporu bočníka

$R_b = \dfrac{U_m}{I_b} = \dfrac{R_m I_m}{I_1 - I_m} = \dfrac{R_m}{n-1}$, kde $n = \dfrac{I_1}{I_m}$ = 20 je pomerné zväčšenie prúdového rozsahu.

Pre dané hodnoty $R_b \approx 1{,}05\ \Omega$.

Celkový odpor prístroja

$R_1 = \dfrac{R_m R_b}{R_m + R_b} = \dfrac{U_m}{I_1} = \dfrac{R_m}{n}$, pre dané hodnoty $R_1 = 1{,}0\ \Omega$. **1 bod**

Ak vyjadríme teplotné závislosti odporov, dostaneme

$$R_1 = R_{10}(1+\alpha_1\Delta t) = \frac{R_m R_b}{R_m + R_b} = \frac{R_{m0}(1+\alpha_{Cu}\Delta t)R_{b0}(1+\alpha_{Ko}\Delta t)}{R_{m0}(1+\alpha_{Cu}\Delta t) + R_{b0}(1+\alpha_{Ko}\Delta t)} =$$

$$= \frac{R_{m0}R_{b0}(1+\alpha_{Cu}\Delta t)(1+\alpha_{Ko}\Delta t)}{R_{m0} + R_{b0} + (R_{m0}\alpha_{Cu} + R_{b0}\alpha_{Ko})\Delta t} = \frac{R_{m0}R_{b0}}{R_{m0}+R_{b0}}\,\frac{1+(\alpha_{Cu}+\alpha_{Ko})\Delta t + \alpha_{Cu}\alpha_{Ko}\Delta t^2}{1+\left(\dfrac{R_{m0}\alpha_{Cu} + R_{b0}\alpha_{Ko}}{R_{m0}+R_{b0}}\right)\Delta t}\,.$$

Pre malé hodnoty $\alpha\,\Delta t << 1$ zanedbáme kvadratický člen v čitateli a pre menovateľ použijeme približný vzťah $1/(1+x) \approx 1-x$, pri úprave zanedbáme malý kvadratický člen s $(\Delta t)^2$. Potom máme

$$R_1 = R_{10}(1+\alpha_1\Delta t) = \frac{R_{m0}R_{b0}}{R_{m0}+R_{b0}}\left[1+(\alpha_{Cu}+\alpha_{Ko})\Delta t\right]\left[1-\left(\frac{R_{m0}\alpha_{Cu}+R_{b0}\alpha_{Ko}}{R_{m0}+R_{b0}}\right)\Delta t\right] =$$

$$\approx R_{10}\left[1+\left(\alpha_{Cu}+\alpha_{Ko}-\frac{R_{m0}\alpha_{Cu}+R_{b0}\alpha_{Ko}}{R_{m0}+R_{b0}}\right)\Delta t\right] = R_{10}\left(1+\frac{\alpha_{Cu}R_{b0}+\alpha_{Ko}R_{m0}}{R_{m0}+R_{b0}}\Delta t\right).$$

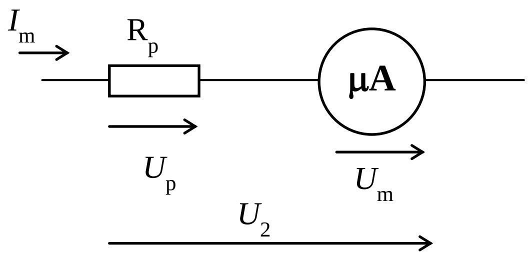
Z porovnania začiatku a konca tohto rozpisu dostaneme koeficient teplotnej závislosti prístroja s bočníkom

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_{Cu}R_{b0}+\alpha_{Ko}R_{m0}}{R_{m0}+R_{b0}} = \frac{\alpha_{Cu}+\alpha_{Ko}(n-1)}{n}$$, pre dané hodnoty $\alpha_1 \approx 2{,}43\times10^{-4}\ \mathrm{K}^{-1}$.

Ako vidno, došlo k zníženiu koeficientu teplotnej závislosti odporu o jeden rád.

2 body

b) Ak chceme merať napätie väčšie ako U_m, musíme pred prístroj zaradiť predradný rezistor s odporom R_p, na ktorom vznikne rozdielový úbytok napätia $U_2 - U_m = R_p I_m$, obr. RB–3.



Obr. RB–3

obrázok **1 bod**

Odtiaľ dostaneme

$$R_p = \frac{U_2-U_m}{I_m} = (u-1)R_m$$, kde $u = U_2/U_m$ = 20 000 je pomerné zvýšenie napäťového rozsahu. Pre dané hodnoty $R_p \approx 400\ \mathrm{k\Omega}$.

Celkový odpor voltmetra je

$$R_2 = R_p + R_m = u\,R_m$$, pre dané hodnoty $R_2 = 400\ \mathrm{k\Omega}$. **1 bod**

Pre teplotnú závislosť odporu dostaneme

$$R_2 = R_{20}\,(1+\alpha_2\,\Delta t) = R_{p0}\,(1+\alpha_{Ko}\,\Delta t) + R_{m0}\,(1+\alpha_{Cu}\,\Delta t) =$$

$$= R_{p0}+R_{m0}+(R_{p0}\alpha_{Ko}+R_{m0}\alpha_{Cu})\Delta t = (R_{p0}+R_{m0})\left(1+\frac{R_{p0}\alpha_{Ko}+R_{m0}\alpha_{Cu}}{R_{p0}+R_{m0}}\Delta t\right).$$

Kvadratický člen s $(\Delta t)^2$ sme zanedbali vzhľadom k ostatným hodnotám súčtu.

Z porovnania dostaneme

$$\alpha_2 = \frac{R_{p0}\alpha_{Ko}+R_{m0}\alpha_{Cu}}{R_{p0}+R_{m0}} = \frac{\alpha_{Cu}+(u-1)\alpha_{Ko}}{u}$$, pre dané hodnoty $\alpha_2 \approx 5{,}0\times10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$.

Vzhľadom na značné zvýšenie rozsahu sa koeficient α redukuje až o dva rády.

2 body

4. Termodynamický dej

Riešenie:

a) Pre termodynamický dej platí stavová rovnica

$$\frac{p\,V}{T}=\frac{p_\mathrm{A}\,V_\mathrm{A}}{T_\mathrm{A}} \qquad 0{,}5\text{b}$$

a zároveň lineárna funkcia $p = \mathrm{f}(V)$ podľa zadania

$$p=p_\mathrm{A}-\frac{p_\mathrm{A}-p_\mathrm{B}}{V_\mathrm{B}-V_\mathrm{A}}\left(V-V_\mathrm{A}\right). \qquad 0{,}5\text{b}$$

Po vylúčení premennej veličiny p máme rovnicu pre premenné T a V

$$\frac{V_\mathrm{B}-V_\mathrm{A}}{p_\mathrm{A}-p_\mathrm{B}}\,\frac{p_\mathrm{A}\,V_\mathrm{A}\,T}{T_\mathrm{A}}=-V^2+\left(\frac{V_\mathrm{B}p_\mathrm{A}-V_\mathrm{A}p_\mathrm{B}}{p_\mathrm{A}-p_\mathrm{B}}\right)V\,.$$

Pravú stranu možno upraviť na tvar

$$\frac{V_\mathrm{B}-V_\mathrm{A}}{p_\mathrm{A}-p_\mathrm{B}}\,\frac{p_\mathrm{A}\,V_\mathrm{A}\,T}{T_\mathrm{A}}=-V^2+\frac{V_\mathrm{B}p_\mathrm{A}-V_\mathrm{A}p_\mathrm{B}}{p_\mathrm{A}-p_\mathrm{B}}V-\frac{1}{4}\left(\frac{V_\mathrm{B}p_\mathrm{A}-V_\mathrm{A}p_\mathrm{B}}{p_\mathrm{A}-p_\mathrm{B}}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{V_\mathrm{B}p_\mathrm{A}-V_\mathrm{A}p_\mathrm{B}}{p_\mathrm{A}-p_\mathrm{B}}\right)^2$$

$$=-\left(V-\frac{1}{2}\frac{V_\mathrm{B}p_\mathrm{A}-V_\mathrm{A}p_\mathrm{B}}{p_\mathrm{A}-p_\mathrm{B}}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{V_\mathrm{B}p_\mathrm{A}-V_\mathrm{A}p_\mathrm{B}}{p_\mathrm{A}-p_\mathrm{B}}\right)^2$$

a funkciu $T = \mathrm{f}(V)$ zapísať v zjednodušenom tvare

$$T=-K\left(V-L\right)^2+M\,, \qquad (1)$$

kde

$$K=T_\mathrm{A}\,\frac{p_\mathrm{A}-p_\mathrm{B}}{p_\mathrm{A}\,V_\mathrm{A}(V_\mathrm{B}-V_\mathrm{A})}=T_\mathrm{A}\,\frac{k-1}{k}\,\frac{1}{V_\mathrm{A}(V_\mathrm{B}-V_\mathrm{A})}$$

$$L=\frac{1}{2}\frac{V_\mathrm{B}p_\mathrm{A}-V_\mathrm{A}p_\mathrm{B}}{p_\mathrm{A}-p_\mathrm{B}}=\frac{1}{2}\frac{kV_\mathrm{B}-V_\mathrm{A}}{k-1} \qquad (2)$$

$$M=\frac{1}{4}\left(\frac{V_\mathrm{B}p_\mathrm{A}-V_\mathrm{A}p_\mathrm{B}}{p_\mathrm{A}-p_\mathrm{B}}\right)^2\frac{p_\mathrm{A}-p_\mathrm{B}}{V_\mathrm{B}-V_\mathrm{A}}\,\frac{T_\mathrm{A}}{p_\mathrm{A}\,V_\mathrm{A}}=\frac{1}{4k\,(k-1)}\,\frac{(kV_\mathrm{B}-V_\mathrm{A})^2}{V_\mathrm{A}(V_\mathrm{B}-V_\mathrm{A})}\,T_\mathrm{A}\,.$$

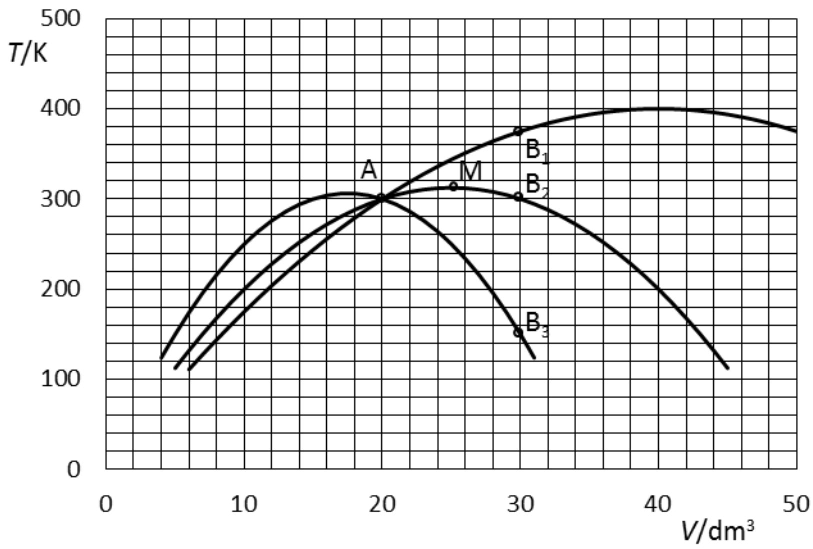
2 b

b) Hodnoty koeficientov kvadratickej funkcie pre jednotlivé prípady

k_1 : $K\approx 2{,}50\times10^5\ \mathrm{m^{-6}\cdot K}$, $L\approx 40\ \mathrm{dm^3}$, $M\approx 400\ \mathrm{K}$,

k_2 : $K\approx 5{,}00\times10^5\ \mathrm{m^{-6}\cdot K}$, $L\approx 25\ \mathrm{dm^3}$, $M\approx 313\ \mathrm{K}$,

k_3 : $K\approx 1{,}00\times10^6\ \mathrm{m^{-6}\cdot K}$, $L\approx 17{,}5\ \mathrm{dm^3}$, $M\approx 306\ \mathrm{K}$,



grafy – 2 b

V grafoch je označený začiatočný stav A a pre každú hodnotu faktora k koncový stav B_1 až B_3. Krivky sú paraboly. 0,5 b

c) Súradnice vrcholu paraboly (1) sú $V_{max} = L$ a $T_{max} = M$.

– Pre hodnotu k_1 teplota monotónne rastie od hodnoty T_A k hodnote

$T_B = -K\,(V_B - L)^2 + M$, pre dané hodnoty $T_m = T_B \approx 375$ K, pri objeme $V_B = 30\ dm^3$.

– Pre hodnotu k_2 nadobudne teplota počas expanzie zo stavu A do stavu B_2 najvyššiu hodnotu v stave M: $T_m = T_{max} = M \approx 313$ K a objem $V_m = V_{max} = L \approx 25 dm^3$.

– Pre hodnotu k_3 teplota počas expanzie monotónne klesá. Maximálnu teplotu plyn má v začiatočnom stave: $T_m = T_A = 300$ K, $V_m = V_A = 20\ dm^3$.

Výsledky získané výpočtom zodpovedajú výsledkom odčítaným z grafu. 3×0,5 b

d) Ak sa má teplota plynu počas expanzie zmenšovať, musí dej prebiehať v rozsahu objemu $V \geq V_{max}$, tzn. $V_A \geq L$. Po dosadení výrazu (2) a pre $k > 1$ máme

$V_A \geq \frac{1}{2}\frac{k V_B - V_A}{k-1}$, tzn. $(2V_A - V_B)\,k \geq V_A$.

Pre $2V_A - V_B > 0$, resp. $V_B < 2\,V_A$, máme $k \geq \frac{V_A}{2V_A - V_B}$.

Pre $2V_A - V_B < 0$ máme $k \leq -\frac{V_A}{V_B - 2V_A} < 0$, čo je v rozpore s predpokladom zadania

$k > 1$

a teda $k \geq \frac{V_A}{2V_A - V_B}$ pre $2V_A - V_B > 0$, resp. $(2V_A - V_B)\,k \geq V_A$

Pre dané hodnoty je splnená podmienka $V_B < 2\,V_A$ a teda musí platiť $k \geq 2$. Táto podmienka je splnená iba pre hodnotu k_3, čo je v súlade grafom A–B_3.

1b

e) Ak sa má teplota plynu počas expanzie zväčšovať, musí dej prebiehať v rozsahu objemu $V \leq V_{max}$, tzn. $V_B \leq V_{max}$, tzn. naľavo od vrcholu grafu.

Po dosadení z výrazu (2) a $k > 1$ máme

$V_B \leq \frac{1}{2}\frac{k V_B - V_A}{k-1}$ a teda $k \leq \frac{2V_B - V_A}{V_B}$ a súčasne pre $k > 1$ podmienku $V_B > V_A$, čo je vždy splnené.

Pre dané hodnoty veličín $1 < k \leq 1{,}33$, čo je splnené pre hodnotu $k_1 = 1{,}2$ (pozri graf A–B$_1$).

1b

f) Ak má platiť $T_A = T_B$, musia body A a B zodpovedajúce začiatočnému a konečnému stavu sa nachádzať na grafe funkcie $T = f(V)$ symetricky okolo vrcholu M.

Pomocou funkcie (1), podmienky $V_{max} - V_A = V_B - V_{max}$ a hodnoty V_{max} z (2) máme

$$k = \frac{V_B}{V_A}.$$

Pre dané hodnoty $k = 1{,}5$ a to zodpovedá hodnote faktora k_2 (pozri graf A–B$_2$) 1 b

5. *Planéta Merkúr*

Riešenie:

a) Vychádzame z predpokladu v zadaní, že má vzťah tvar

$$T = k\, G^{\alpha}\, M^{\beta}\, a^{\gamma}. \qquad (1)$$

Rozmerová rovnica má tvar

$$T = \left[\frac{L^3}{M\,T^2}\right]^{\alpha} M^{\beta}\, L^{\gamma},$$

kde L, M, T sú symboly rozmerov základných veličín dĺžky, hmotnosti a času.

Porovnaní mocnín u jednotlivých rozmerov máme

L: $0 = 3\alpha + \gamma$

M: $0 = -\alpha + \beta$

T: $1 = -2\alpha$,

odkiaľ máme $\alpha = -1/2$, $\beta = -1/2$, $\gamma = 3/2$.

Vzťah (1), po dosadení exponentov nadobudne tvar

$$T = k\, G^{-1/2} M^{-1/2} a^{3/2}, \text{ resp. } T = k\sqrt{\frac{a^3}{G\,M}}. \qquad (2) \qquad 2b$$

Zo vzťahu vidno, že pomer

$\frac{T^2}{a^3} = \frac{k^2}{G\,M}$ je konštantný a nezávisí od veľkosti a hlavnej polosi a teda aj od tvaru trajektórie planéty Merkúr.

Ak uvážime najjednoduchšiu kružnicovú trajektóriu, vyjadríme rovnicu rovnováhy dostredivej a odstredivej sily, pre ktorú tiež platí funkcia (2)

$G\,\dfrac{M\,m}{r^2} = m\,\omega^2\,r$, kde pre tento prípad je $a = r$ a $\omega = 2\pi/T$.

Odtiaľ máme

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M}\,.$$

Porovnaním dostaneme $k = 2\,\pi$ a výsledný vzťah pre dobu obehu planéty Merkúr

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G\,M}}\,. \qquad (3) \qquad 2b$$

b) Excentricita eliptickej trajektórie je vyjadrená vzťahom

$$e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}\,,$$

kde r_P je najmenšia a r_A najväčšia vzdialenosť bodu trajektórie od ohniska elipsy, v ktorej sa nachádza centrálne teleso. Ak uvážime vzťah $2a = r_A + r_P$, kde a je veľkosť hlavnej polosi trajektórie Merkúra, vyjadríme extrémne vzdialenosti

$$r_A = a\,(1+e) \qquad \text{a} \qquad r_P = a\,(1-e)\,.$$

Podľa vzťahu (3) je pomer $T^2/a^3 = 4\pi^2/(GM)$ pre všetky telesá obiehajúce okolo Slnka rovnaký. S použitím hodnôt veličín pre Zem máme

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_Z^2}{a_Z^3}\,, \text{ resp. } a = a_Z\left(\frac{T}{T_Z}\right)^{2/3}\,.$$

Potom platí

$$r_A = (1+e)\,a_Z\left(\frac{T}{T_Z}\right)^{2/3} \qquad \text{a} \qquad r_P = (1-e)\,a_Z\left(\frac{T}{T_Z}\right)^{2/3}\,.$$

Pre dané hodnoty veličín $r_A \approx 6{,}96\times10^{10}$ m, $r_P \approx 4{,}58\times10^{10}$ m. 3 b

c) Ak vyjadríme hmotnosť planéty Merkúr

$$M_M = \frac{\pi}{6}\,d^3\,\rho\,,$$

a dosadíme ju do výrazu pre dobu obehu planéty (vzťah (3)) a za $a_S = (r_{SA} + r_{SP})\,/\,2$, postupne dostaneme pre obežnú dobu sondy

$$T_S = 2\pi\sqrt{\frac{6\,a_S^3}{G\,\pi\,d^3\rho}}\,, \text{ odkiaľ } \rho = \frac{3\pi}{G\,d^3}\,\frac{(r_{SA} + r_{SP})^3}{T_S^2}\,.$$

Pre dané hodnoty $\rho \approx 5{,}53\times10^3$ kg·m^{-3}. 3 b

6. *Balón Univerzum II*

Riešenie:

a) Hmotnosť M je daná súčtom hmotnosti m balóna s gondolou a hmotnosti m_H vodíka

$$m_{\mathrm{H}} = \rho_{\mathrm{H0}}\,\frac{1}{6}\,\pi\, d_0^3\,,$$

kde hustota vodíka

$$\rho_{\mathrm{H0}} = \frac{p_0\, M_{\mathrm{H2}}}{R\, T_0}$$, kde $p_0 \approx 980$ hPa, $T_0 = (273 + 28)$ K a $M_{\mathrm{H2}} = 2{,}0\times10^{-3}$ kg·mol^{-1}.

Celková hmotnosť balóna s gondolou

$$M = m + \frac{1}{6}\,\pi\, d_0^3\,\frac{p_0\, M_{\mathrm{H2}}}{R\, T_0}$$. Pre dané hodnoty veličín $M \approx 3{,}3$ kg. 1b

b) Ak je vztlaková sila F_{v} väčšia ako tiažová F_{g}, začne balón stúpať so zrýchlením $a_0 = (F_{\mathrm{v}} - F_{\mathrm{g}}) / M$. So zvyšovaním rýchlosti narastá odporová sila F_{o} až kým nevznikne rovnováha síl $F_{\mathrm{v}} - F_{\mathrm{g}} - F_{\mathrm{o}} = 0$. Potom sa pohyb stáva rovnomerným. Postupne sa mení objem balóna a tým aj vztlaková sila, čo vyvoláva zmenu rýchlosti tak, aby sa neustále obnovovala rovnováha síl.

$$a_0 = \frac{F_{\mathrm{v}} - F_{\mathrm{g}}}{M} = \frac{1}{M}\,\frac{\pi}{6}\,d_0^3\,\rho_{\mathrm{vz0}}\, g - g = \left(\frac{1}{\dfrac{6}{\pi}\,\dfrac{m\,R\,T_0}{d_0^3\, p_0\, M_{\mathrm{vz}}} + \dfrac{M_{\mathrm{H2}}}{M_{\mathrm{vz}}}} - 1 \right) g\,.$$

Pre dané hodnoty veličín $a_0 \approx 4{,}2$ m·s^{-2}. 1b

Ustálenú rýchlosť určíme z rovnice pre rovnováhu síl

$$\frac{\pi}{6}\,d_0^3\,\rho_{\mathrm{vz0}}\, g - Mg = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{vz0}}\, v_0^2\,\frac{\pi}{4}\,d_0^2\, c_x\,, \qquad (1)$$

odkiaľ

$$v_0 = \sqrt{\frac{4 d_0\, g}{3 c_x}\left[1 - \frac{M_{\mathrm{H2}}}{M_{\mathrm{vz}}} - \frac{6\, m\, R\, T_0}{\pi\, d_0^3\, p_0\, M_{\mathrm{vz}}} \right]}\,.$$

Pre dané hodnoty veličín $v_0 \approx 4{,}0$ m·s^{-1}. 2b

Keďže $v_0 / a_0 \approx 0{,}95$ s, nadobudne balón ustálenú rýchlosť takmer okamžite.

c) Vzhľadom na monotónne závislosti veličín p a t pri výškach až do 10 km, zvolíme krok $\Delta h = 3$ km (3 hodnoty), v oblasti zlomu v grafe teploty okolo $h = 12$ km zvolíme jemnejší krok a nad 15 km stačia iba dve hodnoty. Hodnoty určené z grafov usporiadame do tabuľky

h [km]	0	3	6	9	11	12	13	15	22	24	25,5
t [°C]	28,0	16,5	4,8	-8,0	-14,4	-16,8	-15,0	-8,5	-1,0	1,5	2,9
p [kPa]	98,0	67,5	45,0	28,0	20,5	17,5	14,5	10,0	2,8	2,0	1,5

1b

Vo výške h je priemer balóna d. Tlak plynu vo vnútri

$$p_{\mathrm{in}} = \frac{n\,R\,T}{V} = \frac{6\,n\,R\,T}{\pi\, d^3}\,.$$

Tlakový rozdiel vnútorného a vonkajšieho tlaku

$$\Delta p = p_{\text{in}} - p = \frac{6nRT}{\pi d^3} - p = k \ln\left(\frac{d}{d_0}\right),$$

$$\frac{T}{T_0}\frac{d_0^3}{d^3} - \frac{k}{p_0}\ln\left(\frac{d}{d_0}\right) = \frac{p}{p_0}. \qquad (2)$$

Konštantu k určíme z podmienky $d = d_{\text{max}}$ v maximálnej výške.

$$k = \frac{p_0}{\ln\left(\frac{d_{\text{m}}}{d_0}\right)}\left(\frac{T_{\text{m}}}{T_0}\frac{d_0^3}{d_{\text{m}}^3} - \frac{p_{\text{m}}}{p_0}\right)$$. Pre dané hodnoty $k \approx 480$ Pa. 1b

Pozn. v tomto prípade konštanta k môže mať aj odlišnú hodnotu od uvedenej vzhľadom k tomu, že z grafov na obr. B-3 hodnoty T_{m} a p_{m} sa dajú určiť len približne. Odporúčame uznať výsledky okolo hodnoty $k \approx 0{,}50$ kPa (0,40 až 0,60 kPa).

Numerickým riešením rovnice (2) dostaneme hodnoty

h [km]	0	3	6	9	11	13	15	22	24	24,5	25	25,5
d/d_0	1,00	1,12	1,26	1,45	1,59	1,78	2,02	3,03	3,30	3,42	3,48	3,50
v [m/s]	3,96	4,22	4,42	4,71	4,87	5,05	5,08	5,05	4,73	1,91	1,22	0,65

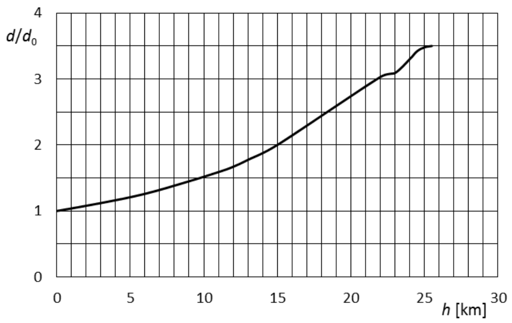
Pozn.: Vzhľadom na významné zmeny v grafe rýchlosti v konečnej fáze boli doplnené ďalšie body medzi výškami 24 km a 25,5 km. 2b

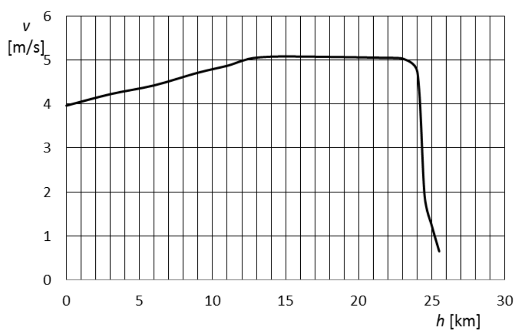
d) Rýchlosť určíme z rovnice (1), v ktorej ρ_{vz0} nahradíme hustotou v danej výške ρ_{vz}

$$v = \sqrt{\left(1 - \frac{6MRT}{\pi d^3\, pM_{\text{vz}}}\right)\frac{4gd}{3c_x}}\,.$$

Hodnoty zodpovedajúce jednotlivým výškam sú uvedené v tabuľke.

Grafy k bodom c) a d) 2b





Obr. RB–4

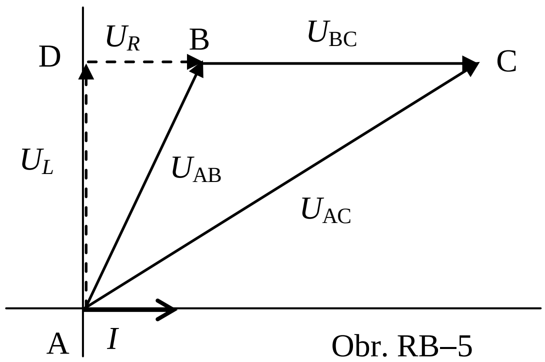
7. *Meranie indukčnosti cievky – experimentálna úloha*

Poznámky k riešeniu:

a) a b) Multimeter meria odpor pomocou konštantného prúdu, preto nameraná hodnota R_0 závisí iba od konduktivity vinutia.

c) Medzi napätiami sú fázové rozdiely, ktoré sa zobrazia vo vektorovom diagrame, z ktorého je zrejmé, prečo $U_{\mathrm{AC}} < U_{\mathrm{AB}} + U_{\mathrm{BC}}$.

Ak do diagramu označíme prúd I obvodu, majú napätia U_{BC} a U_R rovnaký smer, napätie U_L je na prúd I kolmé (fázové posunutie 90°). Z obrázku RB−5 je zrejmá poloha bodu D a spôsob určenia hodnôt U_L a U_R. Pre dosiahnutie čo najväčšej presnosti odčítania hodnôt je potrebné, aby bol diagram čo najväčší a hodnoty U_{AB} a U_{BC} približne rovnaké.



Obr. RB−5

d) Hľadané hodnoty sú

$$R = \frac{U_R}{I} = \frac{U_R}{U_{\mathrm{BC}}} R_{\mathrm{N}}, \qquad L = \frac{1}{2\pi f}\frac{U_L}{I} = \frac{1}{2\pi f}\frac{U_L}{U_{\mathrm{BC}}} R_{\mathrm{N}}.$$

Pozn.: Uvedená metóda sa nazýva „metóda troch voltmetrov“.

Správne riešenie: 10 b

55. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie B*

Autori úloh: Ľubomír Konrád (1, 5), Ľubomír Mucha (2, 3, 4), Ivo Čáp (6, 7)
Recenzia: Daniel Kluvanec, Ivo Čáp (1-3), Ľubomír Mucha (4-7)
Redakcia: Ivo Čáp
Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014